Das Skalarprodukt

Bisher haben wir die Skalarmultiplikation kennengelernt. Dabei wurde eine Zahl (Skalar) mit einem Vektor multipliziert, indem man jeden Eintrag des Vektors mit der Zahl multipliziert:

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Für die Multiplikation zweier Vektoren legen wir fest:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \;\; 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2 + 3 - 0 = 5$$

Bestimme a so, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot a - 2 \cdot (-3) = 0$$
$$2 + 2a - 6 = 0$$
$$2a - 4 = 0$$
$$2a = 4$$
$$a = 2$$

Aufgabe: Berechne $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und zeichne anschließend die Vektoren in ein Koordinatensystem. Was stellst du fest?

Vorübung: Finde einen Vektor, der zu jeweils zu den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

orthogonal ist.

Ansatz: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

Mit dem Skalarprodukt ergeben sich zwei Gleichungen:

I $\quad 1n_1 + 2n_2 + 3\,n_3 = 0 \quad => \quad n_1 = -\,2n_2 - 3\,n_3$
II $\quad 7n_1 + 1n_2 + 4n_3 = 0$

I in II: $7(-\,2n_2 - 3\,n_3) + n_2 + 4n_3 = 0$

$-\,14n_2 - 21\,n_3 + n_2 + 4n_3 = 0$

$-13n_2 - 17\,n_3 = 0$

$-13n_2 = 17\,n_3$

$n_3 = -\frac{13n_2}{17}$

Setze $n_2 = 17 => n_3 = -13$. Eingesetzt in I $n_1 = -\,2n_2 - 3\,n_3$ ergibt sich:

$n_1 = -\,2 \cdot 17 - 3 \cdot (-13) = -\,34 + 39 = 5$

Der Vektor, der zu beiden orthogonal ist, lautet: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -13 \end{pmatrix}$.